

Bestimmung linearer Lichtwechselelemente bei Bedeckungsveränderlichen unter simultaner Verwendung von Haupt- und Nebenminima

Dr. Hans-Mereyntje Steinbach

Abstract: The following paper describes the derivation of linear light-changing elements of eclipsing binaries, taking in consideration the observed times of both primary and secondary light minima. An example is given for V536 Mon.

1 Einführung

Die Idee für diesen Artikel erhielt ich durch den Beitrag von Béla Haßforth (BAV-Rundbrief Nr. 2 / 2004, pp. 33-36), in welchem er die Ergebnisse seiner Arbeit über V536 Mon vorstellte und auch zwei getrennte Sätze Lichtwechselelemente aus den beobachteten Zeiten für Haupt- und Nebenminima ableitete.

Dieser Ansatz weist allerdings die Schwierigkeit auf, daß die abgeleiteten Lichtwechselelemente aufgrund unterschiedlicher systematischer und/oder statistischer Einflüsse im allgemeinen verschiedene Werte für die Periode liefern, was im Widerspruch zu den physikalischen Gegebenheiten bei Bedeckungsveränderlichen steht.

Diese Schwäche kann man aber leicht in den Griff bekommen, in dem man anstelle des “normalen” linearen Regressionsmodells ein leicht abgewandeltes einsetzt. Voraussetzung hierfür ist allerdings, daß für den zu berücksichtigenden Zeitraum die Lage des Nebenminimums in bezug auf das Hauptminimum konstant ist, was aber meist als gegeben angenommen werden kann.

2 Das lineare Regressionsmodell

Zur Erinnerung gehe ich noch einmal auf das “normale” lineare Regressionsmodell ein. Hierbei wird angenommen, daß sich die Zeiten der Haupt-/Nebenminima durch die lineare Funktion

$$M = E_0 + E \cdot P \tag{1}$$

darstellen lassen, wobei M den Zeitpunkt eines Hauptminimums angibt, E_0 die Nullepoche, P die Periode, und E die aktuelle Epochenzahl.

In der Astronomie hat man es dann meist mit der Aufgabe zu tun, aus einer Reihe von beobachteten Minimumszeiten M_i zu bekannten Epochenwerten E_i eine beste Schätzung für die

Parameter E_0 und P abzuleiten. Hierzu verwendet man üblicherweise die von Carl Friedrich Gauß bereits 1794 entwickelte “Methode der kleinsten Quadrate”¹.

Im Falle von gleichgenauen - oder auch: gleichgewichteten - Beobachtungen, ergeben sich die beiden gesuchten Parameter als Lösung des sogenannten “Normal-gleichungssystems”, das hier in Matrix-Schreibweise dargestellt ist:

$$\begin{pmatrix} N & [E] \\ [E] & [E^2] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_0 \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [M] \\ [E \cdot M] \end{pmatrix} \quad (2)$$

Hierbei bedeuten die eckigen Klammern gemäß der Gauß’schen Schreibweise Summationen über die jeweiligen Größen; N ist die Anzahl der Beobachtungen.

3 Das erweiterte lineare Regressionsmodell

Mit dem Begriff “erweitertes” Regressionsmodell bezeichne ich jenes, das die simultane Ausgleichung beobachteter Zeiten von Haupt- und Nebenminima erlaubt. Die Koppelung dieser Datensätze geschieht über die Periode P .

Der Ansatz ist zunächst ganz analog dem oben beschriebenen, allerdings wird die Darstellung der Minima auf die Nebenminima erweitert. Somit ergibt sich für die Hauptminima :

$$M_H = E_{0,H} + E_H \cdot P \quad (3)$$

und für die Nebenminima analog

$$M_N = E_{0,N} + E_N \cdot P \quad (4)$$

Die Indizes H und N bezeichnen die Haupt- und Nebenminima. Der Einfachheit halber bietet es sich an, die Zählung der Epochen aufeinander abzustimmen, d. h., daß z. B. das einem Hauptminimum folgende Nebenminimum dieselbe Epochenzahl zugewiesen bekommt, wie das Hauptminimum selbst (prinzipiell ist es allerdings möglich, hiervon abzuweichen).

Aus diesem Ansatz ergibt sich das folgende Normalgleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} N_H & 0 & [E_H] \\ 0 & N_N & [E_N] \\ [E_H] & [E_N] & [E_H^2] + [E_N^2] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{0,H} \\ E_{0,N} \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [M_H] \\ [M_N] \\ [E_H M_H] + [E_N M_N] \end{pmatrix} \quad (5)$$

¹Interessant ist, daß Gauß 1840 in einem Brief an den Herausgeber der *Astronomischen Nachrichten*, H. C. Schumacher, schrieb, daß er nie großen Wert auf diese Methode gelegt habe, da er (irrtümlicherweise!) davon ausging, daß sie so natürlich sei, daß sie bereits von vielen Personen angewandt worden sei, ohne daß diese viel Aufhebens davon gemacht hätten (C.F. Gauß in Briefen und Gesprächen, Verlag C. H. Beck)

Die Auflösung dieses Normalgleichungssystems nach den Parametern liefert:

$$E_{0,H} = \frac{[M_H] \cdot \left(N_N \cdot ([E_H^2] + [E_N^2]) - [E_N]^2 \right) + [E_H] \cdot \left([E_N][M_N] - N_N \cdot ([E_H M_H] + [E_N M_N]) \right)}{N_H \cdot N_N \cdot ([E_H^2] + [E_N^2]) - N_N \cdot [E_H]^2 - N_H \cdot [E_N]^2} \quad (6)$$

$$E_{0,N} = \frac{[M_N] \cdot \left(N_H \cdot ([E_H^2] + [E_N^2]) - [E_H]^2 \right) + [E_N] \cdot \left([E_H][M_H] - N_H \cdot ([E_H M_H] + [E_N M_N]) \right)}{N_H \cdot N_N \cdot ([E_H^2] + [E_N^2]) - N_N \cdot [E_H]^2 - N_H \cdot [E_N]^2} \quad (7)$$

$$P = \frac{N_H \cdot N_N \cdot ([E_H M_H] + [E_N M_N]) - N_N \cdot [E_H][M_H] - N_H \cdot [E_N][M_N]}{N_H N_N \cdot ([E_H^2] + [E_N^2]) - N_N \cdot [E_H]^2 - N_H \cdot [E_N]^2} \quad (8)$$

Der sich aus diesem Reduktionsmodell ergebende mittlere Fehler einer Einzelmessung ist bestimmt durch die Wurzel der durch die Anzahl der überschüssigen Messungen dividierten Fehlerquadratsumme $[vv]$:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{N_H + N_N - 3}} \quad (9)$$

Hiermit lassen sich abschließend auch die Fehler der bestimmten Parameter selbst abschätzen. Man erhält

$$\epsilon_{E_{0,H}} = \pm \sigma_0 \cdot \sqrt{\frac{N_N \cdot ([E_H^2] + [E_N^2]) - [E_N]^2}{N_H N_N \cdot ([E_H^2] + [E_N^2]) - N_N \cdot [E_H]^2 - N_H \cdot [E_N]^2}} \quad (10)$$

$$\epsilon_{E_{0,N}} = \pm \sigma_0 \cdot \sqrt{\frac{N_H \cdot ([E_H^2] + [E_N^2]) - [E_H]^2}{N_H N_N \cdot ([E_H^2] + [E_N^2]) - N_N \cdot [E_H]^2 - N_H \cdot [E_N]^2}} \quad (11)$$

$$\epsilon_P = \pm \sigma_0 \cdot \sqrt{\frac{N_H \cdot N_N}{N_H N_N \cdot ([E_H^2] + [E_N^2]) - N_N \cdot [E_H]^2 - N_H \cdot [E_N]^2}} \quad (12)$$

Man beachte, daß der Nenner in den parameterbestimmenden Ausdrücken stets identisch ist !

4 Anwendungsbeispiel V536 Mon

Das eben Beschriebene soll anhand der Beobachtungen von V536 Mon verdeutlicht werden. Die nachfolgende Tabelle gibt die Beobachtungen aus dem BAV-Rundbrief 2, p. 36 wieder, allerdings mit der Abänderung, daß ich die Epochenzählung der Nebenminima in oben beschriebenem Sinne an derjenigen für die Hauptminima orientierte, was zu einer Verschiebung um -54 Epochen gegenüber der Darstellung im Rundbrief führt.

Hauptminima				Nebenminima			
Epoche	O	C	O - C	Epoche	O	C	O - C
0	30025.411	.3221	0.0889	-54	29696.320	.6057	-0.2857
485	33000.355	.3213	0.0337	-49	29727.355	.2758	0.0792
1233	37588.651	.5676	0.0834	182	31144.351	.2342	0.1168
1301	38005.624	.6809	-0.0569	520	33217.352	.5327	-0.1807
1472	39054.616	.5981	0.0179	720	34444.382	.3365	0.0455
1546	39508.477	.5156	-0.0386	773	34769.437	.4395	-0.0025
1598	39827.560	.4845	0.0755	832	35131.452	.3466	0.1054
2089	42839.285	.2879	-0.0029	1071	36597.374	.3772	-0.0032
2925	47967.327	.3278	-0.0008	1437	38842.370	.4281	-0.0581
3076	48893.592	.5647	0.0273	3041	48681.373	.3947	-0.0217
3144	49310.523	.6780	-0.1550	3197	49638.581	.3017	0.2793
3211	49721.395	.6573	-0.2623	3703	52742.041	.1153	-0.0743
3281	50151.285	.0386	0.2464				
3703	52739.538	.5946	-0.0566				

Bei den berechneten Werten "C" und bei den "O-C" ist eine Dezimalstelle mehr angegeben, als die Genauigkeit der beobachteten Minima hergibt. Dies ist nur aus "kosmetischen" Gründen und nicht weiter relevant.

Aus diesen Daten ergeben sich gemäß obiger Formeln die Lichtwechselemente zu:

$$\begin{array}{ll}
 E_{0,H} = J.D. 2430025.322 & P = 6^d.1340190 \\
 \pm .059 & \pm .0000225 \\
 E_{0,N} = J.D. 2430027.843 & [vv] = 0.41899391 \\
 \pm .048 & \sigma_0 = 0.134971
 \end{array}$$

Im Vergleich hierzu lauten die individuell aus den Haupt- resp. Nebenminima abgeleiteten Elemente:

$$\begin{array}{ll}
 E_{0,H} = J.D. 2430025.385 & P = 6^d.1339888 \\
 \pm .067 & \pm .0000285 \\
 [vv] = 0.16839860 & \sigma_0 = 0.118462 \\
 E_{0,N} = J.D. 2430027.807 & P = 6^d.1340468 \\
 \pm .061 & \pm .0000342 \\
 [vv] = 0.22028019 & \sigma_0 = 0.148418
 \end{array}$$

die ja auch von Herrn Haßforter abgeleitet wurden (bis auf die Verschiebung der Epochenzählung für die Nebenminima).

Anhand des Vergleiches erkennt man sehr schön, wie sich die Fehler in den Elementen durch den erweiterten linearen Ansatz prozentual deutlich verringert haben und die Elemente selbst eine höhere Stabilität erhalten.