

Darstellung gefalteter Lichtkurven

Lienhard Pagel

In meinem Beitrag „Information gefalteter Lichtkurven“ im Rundbrief 2/2015 habe ich das Verfahren der Faltung erläutert und den engen Zusammenhang zur Periodensuche hervorgehoben. Das Verfahren der Faltung wird auch als Reduzierung von Lichtkurven oder Periodenüberlagerung bezeichnet. In diesem Beitrag möchte ich auf den Begriff der Faltung, die mathematischen Grundlagen, die Notwendigkeit der Faltung und die Darstellung gefalteter Lichtkurven im (B-R)-Diagramm eingehen.

Der Begriff „Faltung“ (engl. Convolution) bezeichnet in der Funktionalanalysis einen Operator, der angewandt auf 2 Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ eine dritte Funktion $(f*g)(t)$ liefert. Das Ergebnis ist definiert durch

$$(f*g)(t) = \int f(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

Das Integral heißt Faltungsintegral. Anschaulich lässt sich Faltung als Gewichtung einer Funktion mit einer anderen deuten. In [2] sind anschauliche und „bewegte“ Beispiele zu finden. Für unsere Betrachtung spielt die Faltung einer Funktion mit einer sogenannten DIRAC-Funktion (oder Delta-Funktion) eine Rolle. Das ist eine Funktion, die zu einem Zeitpunkt einen unendlich hohen Wert hat, ansonsten überall Null ist. Das Integral über einen solchen „Dirac-Impuls“ ist 1. Die Funktion kann als sehr schmales Rechteck aufgefasst werden. Dieses „Rechteck“ ist unendlich hoch, hat die Breite Null und die Fläche 1.

Wenn wir Lichtkurven falten, dann können wir das Faltungsintegral so anwenden, dass wir die diskrete Lichtkurve $f(t)$ (Folge von Messwerten) mit einer Funktion $g(t)$ falten, die periodisch Dirac-Impulse im Takt der Periode des Veränderlichen enthält. Das Ergebnis der Integration ist die (diskrete) gefaltete Lichtkurve. Zum Verständnis ist es hilfreich zu wissen, dass die Faltung einer Funktion mit einem Dirac-Impuls die Funktion nur zeitlich verschiebt, ansonsten nicht verändert.

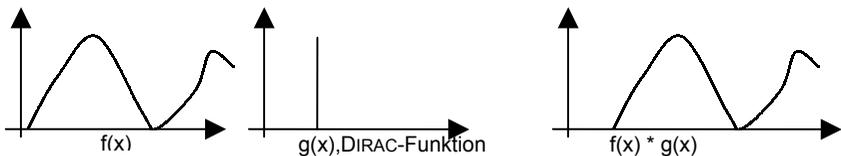


Bild 1: Faltung einer Funktion mit einer DIRAC-Funktion liefert im Ergebnis eine Verschiebung der Funktion

Ob wir die ungefaltete Lichtkurve als zeitdiskrete Funktion mit nicht äquidistanten Werten oder als analoge Funktion betrachten, ist nicht wesentlich für das Ergebnis. Der Messwert hat ja eine endliche Zeit, so dass man auch eine "analoge" Zeitfunktion mit einer periodischen Impulsfunktion mit endlich breiten Impulsen falten könnte. Dabei sollte die Anzahl der Perioden endlich sein und das Ergebnis durch die Anzahl der Perioden geteilt werden.

Die Ermittlung von Fourier-Koeffizienten läuft ähnlich, hier "falten" wir mit einer (periodischen) Sinusfunktion (FOURIER-Integral), das Ergebnis ist dabei etwas, aus dem wir in einen FOURIER-Koeffizienten berechnen können. Das FOURIER-Integral eignet sich also auch zur Periodensuche.

Die Helligkeitsermittlung von Sternen in CCD-Bildern mit der PSF ist auch ein Faltungsprozess (zweidimensional), die Lochblende als spezielle PSF auch.

Der Begriff der Faltung hat also eine sehr weitreichende Bedeutung. Soweit die Mathematik.

Wozu brauchen wir die Faltung von Lichtkurven?

Wenn es uns nicht gelingt, von einer periodischen Lichtkurve in einer Nacht wenigstens eine Periode aufzunehmen, kann uns die Faltung zu einer Lichtkurve führen. Das kann der Fall sein, wenn die Periode länger als eine Nacht ist, beispielsweise bei Cepheiden. Hier kann in mehreren Nächten photometriert werden. Es entstehen jeweils nur Teile der Lichtkurven, niemals ganze Perioden. Überlagern wir die Teil-Lichtkurven mehrfach zeitversetzt um die Periode, können wir eine vollständige Lichtkurve erhalten.

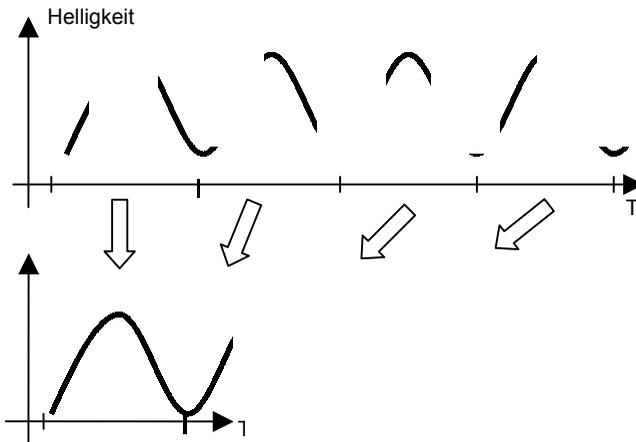


Bild 2: Schematische Darstellung der Faltung einer Lichtkurve

Im extremen Falle können uns nur wenige oder ein Messwerte pro Nacht zur Verfügung stehen, durch Faltung kann die Konstruktion einer Lichtkurve gelingen.

Auch bei kurzperiodischen Veränderlichen mit Perioden von wenigen Stunden können Faltungen helfen, wenn aus technischen Gründen nur wenige spärliche Messwerte zur Verfügung stehen.

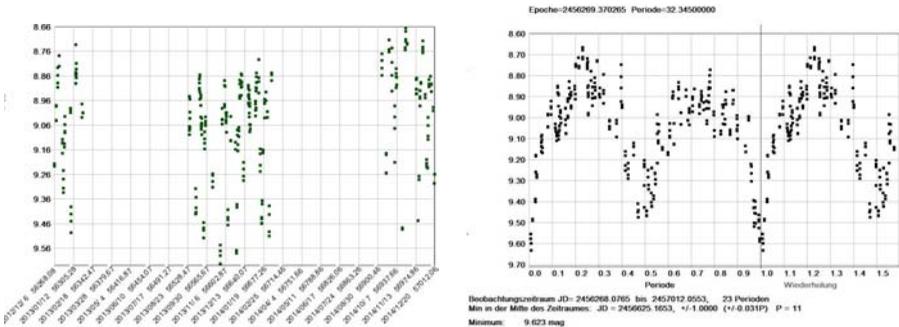


Bild 3: Faltung von einzelnen Messwerten von RX CAS zu einer Lichtkurve. Daten des Surveys KWS. Links die Messwerte in zeitlicher Reihenfolge, rechts die gefaltete Lichtkurve.

Beobachtungszeitraum: 2456268 bis 2457012, 23 Perioden,
 Epoche: 2456269,370265 Periode: 32,345 d, $\Delta P = 0,2$ d

Es ist ersichtlich, dass eine Faltung nur gelingt, wenn die Lichtkurve periodisch ist oder wenigstens angenähert periodisch ist. Die Faltung kann deshalb auch verwendet werden, um Abweichungen von der Periodizität, beispielweise durch einen BLAZHKO-Effekt bei RR-Lyrae Sternen, fest zu stellen [3].

Letztlich kann durch systematisches Probieren verschiedener Perioden durch Faltung auch die Periode ermittelt werden [1].

Welches Ergebnis liefert eine gefaltete Lichtkurve?

Sie besagt, dass über einen Beobachtungszeitraum ΔT eine plausible Lichtkurve durch Faltung mit der Periode P und einer Epoche E dargestellt werden kann. Nicht mehr, aber auch nicht weniger. Die Periode ist mit einem Fehler ΔP behaftet. Innerhalb der Fehlergrenzen erhalten wir eine plausible Lichtkurve.

In einem auf P angepasstem (B-R)-Diagramm kann das Ergebnis als horizontale Strecke mit Fehlerangabe dargestellt werden. Beziehen wir die Fehlergrenzen in die Darstellung ein, entsteht ein Rechteck wie in Bild 4.

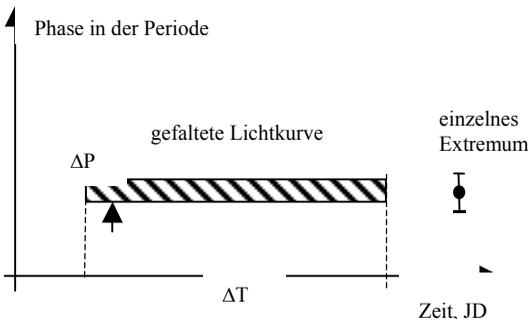


Bild 4: Darstellung des Ergebnisses einer Faltung.

In einer numerischen Darstellung des Ergebnisses müssen als 4 Werte angegeben werden:

$$P, \Delta P, E, \Delta T$$

Wird dieses Ergebnis in ein Vorhandenes (B-R)-Diagramm mit einer anderen Periode eingetragen, kippt diese Darstellung um einen Winkel (siehe Bild 7 in [1]).

Bei der Darstellung handelt sich genau genommen um eine Hypothese, der man meist eine sehr hohe Wahrscheinlichkeit für ihre Richtigkeit zuordnen kann. Dieser Mangel einer Hypothese haftet letztendlich jeder Lichtkurve an, die nicht lückenlos aufgenommen wurde. In den Zeiten zwischen den Messungen könnte ja irgendetwas Unerwartetes passiert sein (siehe Bild 1 und 2 in [1]).

Über die Darstellung einer gefalteten Lichtkurve in einem (B-R)-Diagramm gehen die Meinungen auseinander. Wird die gefaltete Lichtkurve nur als Punkt dargestellt, wird praktisch nur ein repräsentatives fiktives Extremum genutzt. Die Periode P und der Zeitraum ΔT werden nicht genutzt, sind aber wichtige Ergebnisse der Faltung.

Wird am Anfang, in der Mitte und am Ende von ΔT eine Extremum in das (B-R)-Diagramm eingetragen, werden schon mehr Informationen aus der Faltung genutzt. Allerdings wird suggeriert, dass über den Zweitraum zwischen den Punkten keine Informationen vorliegen, was nicht korrekt ist. Diese Darstellung ist möglicherweise ein Kompromiss, ein schlechter, wenn eine Strecke oder ein Rechteck nicht dargestellt werden können.

Liegen genügend Messwerte über einen breiten Zeitraum vor, kann der Zeitraum ΔT in mehrere Abschnitte untergliedert werden und für jeden Abschnitt ein fiktives Extremum eingetragen werden. Das ist auch ein Kompromiss, ein besserer.

Zusammenfassend muss man feststellen, dass gefaltete Lichtkurven in vielen Fällen die einzige Möglichkeit sind, Lichtkurven darzustellen, Perioden und Epochen zu ermitteln. Sie liefern sehr viel mehr Informationen als nur ein Extremum.

Literatur

- [1] Lienhard Pagel, Informationen gefalteter Lichtkurven, Rundbrief 2/2015 S.120
- [2] [https://de.wikipedia.org/wiki/Faltung_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Faltung_(Mathematik))
- [3] Gisela Maintz, V845 Cas-ein RRab mit BLAZHKO-Effekt, Bundbrief 2/2015, S. 77, Abb 1.